

MODEL *JOINT ECONOMIC LOT SIZE* PADA KASUS PEMASOK-PEMBELI DENGAN PERMINTAAN PROBABILISTIK

Wakhid Ahmad Jauhari¹, I Nyoman Pujawan², Stefanus Eko Wiratno³

¹Fakultas Teknik, Jurusan Teknik Industri, Universitas Sebelas Maret
Jl. Ir. Sutami 36 A Surakarta, 57126

Email : wachid_aj@yahoo.com

^{2,3}Fakultas Teknologi Industri, Jurusan Teknik Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Kampus Keputih Sukolilo Surabaya, 60111

Email : pujawan@ie.its.ac.id, eko_w@ie.its.ac.id

ABSTRAK

Pada penelitian ini akan dikembangkan model gabungan pemasok-pembeli dengan permintaan probabilistik dan ukuran pengiriman sama. Pada model setiap *lot* pemesanan akan dikirim dalam beberapa *lot* pengiriman dan pemasok akan memproduksi barang dalam ukuran *batch* produksi yang merupakan kelipatan *integer* dari *lot* pengiriman. Dikembangkan pula suatu algoritma untuk menyelesaikan model matematis yang telah dibuat. Selain itu, pengaruh perubahan parameter terhadap perilaku model diteliti dengan analisis sensitivitas terhadap beberapa parameter kunci, seperti ukuran *lot*, stok pengaman dan total biaya persediaan. Pada penelitian ini juga dibuat model simulasi untuk melihat performansi model matematis pada kondisi nyata.

Kata kunci: model gabungan, permintaan probabilistik, *lot* pengiriman, *supply chain*

ABSTRACT

In this paper we consider single vendor single buyer integrated inventory model with probabilistic demand and equal delivery lot size. The model contributes to the current literature by relaxing the deterministic demand assumption which has been used for almost all integrated inventory models. The objective is to minimize expected total costs incurred by the vendor and the buyer. We develop effective iterative procedures for finding the optimal solution. Numerical examples are used to illustrate the benefit of integration. A sensitivity analysis is performed to explore the effect of key parameters on delivery lot size, safety factor, production lot size factor and the expected total cost. The results of the numerical examples indicate that our models can achieve a significant amount of savings. Finally, we compare the results of our proposed model with a simulation model.

Keywords: *integrated inventory model, probabilistic demand, equal delivery lot size, supply chain*

1. PENDAHULUAN

Pengelolaan persediaan yang dilakukan secara konvensional dipandang sudah tidak cocok lagi dengan kondisi saat ini. Selain sudah tidak sesuai dengan semangat *partnership*, pengelolaan persediaan secara konvensional akan menimbulkan distorsi informasi pada jaringan *supply chain* yang berakibat pada munculnya kerugian pada salah satu pihak dalam *supply chain*. Cara atau model pengelolaan persediaan yang dapat mengintegrasikan beberapa pihak dalam *supply chain* sangat diperlukan untuk meminimasi terjadinya distorsi informasi, sehingga dapat dihasilkan sinkronisasi pengelolaan persediaan pada jaringan *supply chain*.

Model persediaan seperti *Joint Economic Lot Size* (JELS), yang mengintegrasikan pengelolaan persediaan dalam *supply chain*, telah menarik perhatian beberapa peneliti untuk mengembangkannya. Goyal (1976) merupakan peneliti yang pertama kali memodelkan JELS. Solusi yang dihasilkan dari model ini dapat memberikan penghematan yang signifikan pada total biaya persediaan gabungan. Selanjutnya Banerjee (1986) membuat model persediaan pemasok-pembeli dengan kebijakan *lot for lot* dimana pemasok memproduksi tiap pengiriman ke pembeli dalam *batch* produksi yang terpisah. Goyal (1988) mengkritisi model Banerjee (1986) yang mempertimbangkan kebijakan *lot for lot*. Goyal (1988) mengembangkan model persediaan yang merelaksasi adanya asumsi *lot for lot* pada model Banerjee (1986). Pada model ini pemasok akan memproduksi sejumlah kelipatan *integer* dari *lot* pemesanan pembeli. Model ini menghasilkan penghematan total biaya persediaan yang relatif lebih besar dari model sebelumnya.

Pujawan dan Kingsman (2002) mengembangkan model persediaan pemasok-pembeli untuk suatu horison waktu yang tak terbatas. Pada model ini pembeli menginginkan pengiriman dilakukan sebanyak n kali, sedangkan produksi yang dilakukan oleh pemasok adalah m kali. Jika pengiriman dilakukan dalam jumlah q , maka *lot* pemesanan pembeli dirumuskan sebagai nq dan *lot* produksi sebagai mq . Peneliti melakukan perbandingan antara model *lot streaming* dengan tanpa *lot streaming* untuk 2 kasus yang berbeda, yaitu: (i) jika keputusan dilakukan masing-masing pihak, dan (ii) jika keputusan dilakukan secara bersama-sama. Solusi yang didapatkan menunjukkan bahwa sinkronisasi yang baik antara pemasok dan pembeli dalam menentukan frekuensi pengiriman dan waktu produksi akan menghasilkan penghematan terhadap total biaya persediaan yang cukup signifikan.

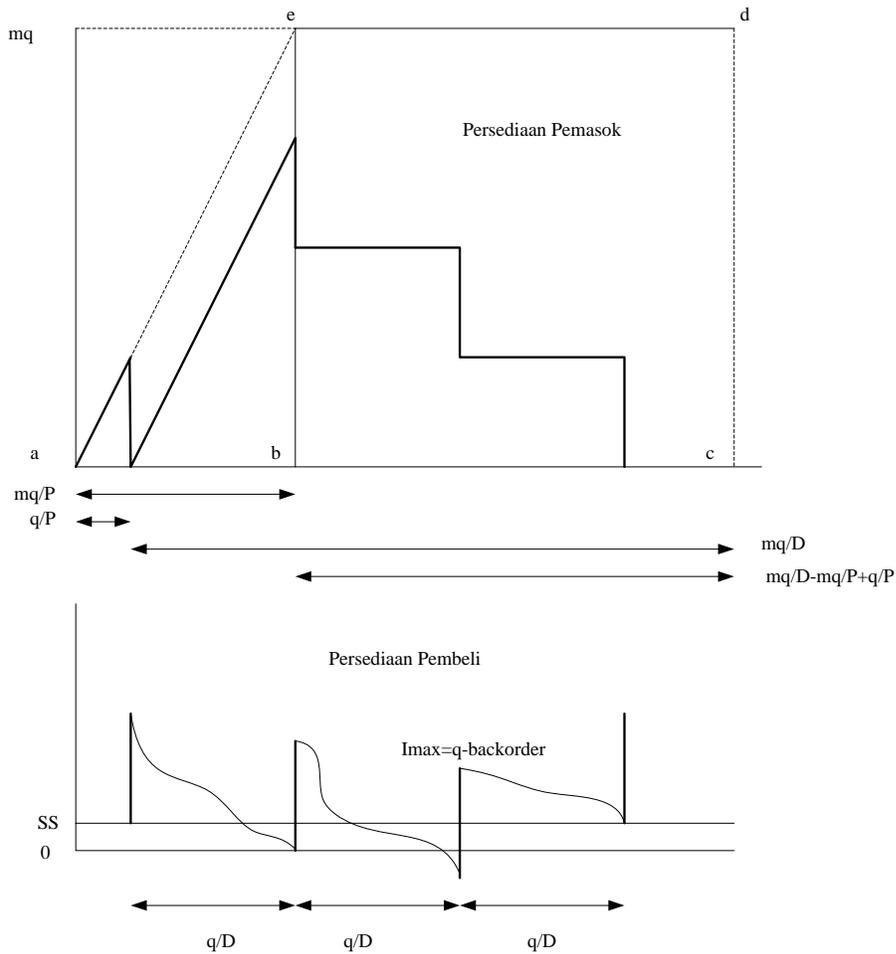
Dari beberapa model persediaan di atas, kecuali model Pujawan dan Kingsman (2002), tidak ada yang mempertimbangkan adanya suatu tingkat kebebasan (*degree of independence*) antara pemasok dan pembeli dalam mengelola persediaan. David dan Eben-Chaime (2003) merupakan peneliti yang menganjurkan diperlukannya suatu tingkat kebebasan dalam penentuan frekuensi pengiriman dan tingkat fleksibilitas dalam penentuan *lot* pemesanan maupun *batch* produksi. Beberapa model di atas juga masih mengasumsikan permintaan deterministik, padahal dalam kondisi nyata permintaan akan bervariasi dari waktu ke waktu. Asumsi deterministik tersebut akan membuat model persediaan yang ada sulit diaplikasikan pada kondisi riil. Penelitian ini mencoba untuk merelaksasi asumsi permintaan deterministik menjadi permintaan probabilistik.

2. PENGEMBANGAN MODEL

2.1 Model Matematis

Pada model ini permintaan pada pembeli bersifat probabilistik dan variasi permintaan diketahui oleh pemasok. Tingkat produksi pada pemasok diasumsikan tetap sebesar P , dimana tingkat produksi lebih besar dari tingkat permintaan ($P > D$). Pembeli mengelola persediaannya secara periodik dengan *lead time* pemesanan diasumsikan nol. Biaya penyimpanan produk pada pembeli dianggap lebih mahal daripada biaya penyimpanan produk pada pemasok.

Pada model ini pembeli melakukan pemesanan produk sejumlah nq ke pemasok dengan frekuensi pengiriman sebanyak n kali (sesuai dengan keinginan pembeli) dengan *lot* pengiriman q , sedangkan untuk memenuhi permintaan pembeli, pemasok memproduksi produk dengan ukuran *batch* produksi mq . Pengiriman produk dari pemasok ke pembeli dilakukan setiap periode (nq/D) dan dapat dilakukan jika pemasok telah memiliki persediaan minimal sejumlah q , sehingga tidak perlu menunggu seluruh *batch* selesai diproduksi. Gambar model persediaan dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Model persediaan pemasok dan pembeli

Notasi berikut ini akan digunakan untuk mengembangkan model:

- D permintaan tahunan
- σ standar deviasi permintaan
- P kecepatan produksi tahunan
- K biaya *setup* produksi
- A biaya pemesanan pembeli
- F biaya pengiriman
- k faktor pengaman
- SS *safety stock* pada pembeli
- ES ekspektasi jumlah *backorder*
- h_b biaya penyimpanan produk pada pembeli
- h_v biaya penyimpanan produk pada pemasok
- π biaya *backorder*
- n frekuensi pengiriman
- $f(.)$ *probability density function* dari distribusi normal standar
- $F(.)$ *cumulative distribution function* dari distribusi normal standar
- TC_B total ekspektasi biaya pembeli
- TC_V total ekspektasi biaya pemasok
- TC_{Gab} total biaya gabungan

Total ekspektasi biaya pembeli per unit waktu didapat dari penjumlahan biaya pemesanan, biaya pengiriman, biaya persediaan pada pembeli dan biaya *backorder*. Penurunan rumus total ekspektasi biaya pembeli mengikuti model Pujawan dan Kingsman (2002) dengan mengasumsikan permintaan pada pembeli mengikuti distribusi normal. Penurunan rumus untuk mencari ekspektasi jumlah *backorder* mengikuti model yang sudah ada pada Chopra dan Meindl (2001)

$$TC_B = \frac{D}{nq}(A + Fn) + h_b \left(\frac{q}{2} + k\sigma\sqrt{q/D} \right) + \left(\frac{D}{q} \right) \pi ES \quad (1)$$

dimana

$$SS = k\sigma\sqrt{q/D}, \quad ES = \sigma\sqrt{q/D} \{f(k) - k[1 - F(k)]\} = \sigma\sqrt{q/D}\psi(k) \quad (2)$$

Total ekspektasi biaya pemasok per unit waktu didapat dari penjumlahan biaya persediaan dan biaya *setup* produksi. Tingkat persediaan pemasok didapat dengan mengurangi akumulasi produksi dengan akumulasi konsumsi pembeli.

$$TC_V = \frac{q}{2} h_v \left((m-1) - (m-2) \frac{D}{P} \right) + \frac{DK}{mq} \quad (3)$$

Sehingga total biaya gabungan dapat dirumuskan sebagai

$$TC_{Gab}(m, q, k) = \frac{D}{nq}(A + Fn) + h_b \left(\frac{q}{2} + k\sigma\sqrt{q/D} \right) + \left(\frac{D}{q} \right) \pi \sigma \sqrt{q/D} \psi(k) + \frac{q}{2} h_v \left\{ (m-1) - (m-2) \frac{D}{P} \right\} + \frac{DK}{mq} \quad (4)$$

Untuk nilai m yang tetap, $TC_{Gab}(m, q, k)$ akan mencapai minimum pada titik (q^*, k) yang memenuhi $\frac{\partial TC_{Gab}(m, q, k)}{\partial q} = 0$ dan $\frac{\partial TC_{Gab}(m, q, k)}{\partial k} = 0$ secara simultan kedua persamaan ini dapat ditambahkan dengan persamaan berikut

$$\frac{\partial TC_{Gab}(m, q, k)}{\partial q} = 0 \quad (5)$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2D \left(\frac{A}{n} + F \right) + \frac{K}{m} + \pi \sigma \psi(k) \sqrt{q/D}}{h_b + h_v \left\{ (m-1) - (m-2) \frac{D}{P} \right\} + \frac{h_b \sigma}{D \sqrt{q/D}} \left(k + \frac{\psi(k)}{1 - F_s(k)} \right)}} \quad (6)$$

Pencarian solusi terhadap nilai m^* , q^* dan k^* yang dapat meminimumkan total biaya persediaan gabungan dapat dilakukan dengan menggunakan suatu algoritma. Algoritma yang

dibuat mengacu pada ide dasar algoritma yang telah dikembangkan oleh Ben-Daya dan Hariga (2004). Pencarian nilai konvergen (q, k) dilakukan sesuai dengan cara yang telah dikembangkan oleh Ouyang *et al.* (2004). Algoritma baru yang dikembangkan untuk menyelesaikan model penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

Algoritma

Langkah 0 : Tetapkan $m = 1$ dengan $TC(q_{m-1}^*, k_{m-1}^*, m-1) = \infty$

Langkah 1 : Mulai dengan nilai *lot* pengiriman

$$q = \sqrt{\frac{2D\left(\frac{A}{n} + F\right) + \frac{K}{m}}{h_b + h_v\left\{(m-1) - (m-2)\frac{D}{P}\right\}}}$$

Langkah 2 : Gunakan nilai q untuk mendapatkan nilai k dengan persamaan (5)

Langkah 3 : Hitung q dengan persamaan (6)

Langkah 4 : Ulangi Langkah 2 sampai 3 hingga nilai q dan k tidak berubah

Langkah 5 : Tetapkan bahwa $q_m^* = q$ dan $k_m^* = k$ dan hitung $TC(q_m^*, k_m^*, m)$ dengan persamaan (4)

Langkah 6 : Jika $TC(q_m^*, k_m^*, m) \leq TC(q_{m-1}^*, k_{m-1}^*, m-1)$ ulangi Langkah 1 sampai 5 dengan $m = m+1$, tetapi jika sebaliknya lanjutkan ke Langkah 7

Langkah 7 : Hitung $TC(q^*, k^*, m^*) = TC(q_{m-1}^*, k_{m-1}^*, m-1)$ sehingga didapatkan nilai q^* , k^* dan m^* adalah solusi optimal

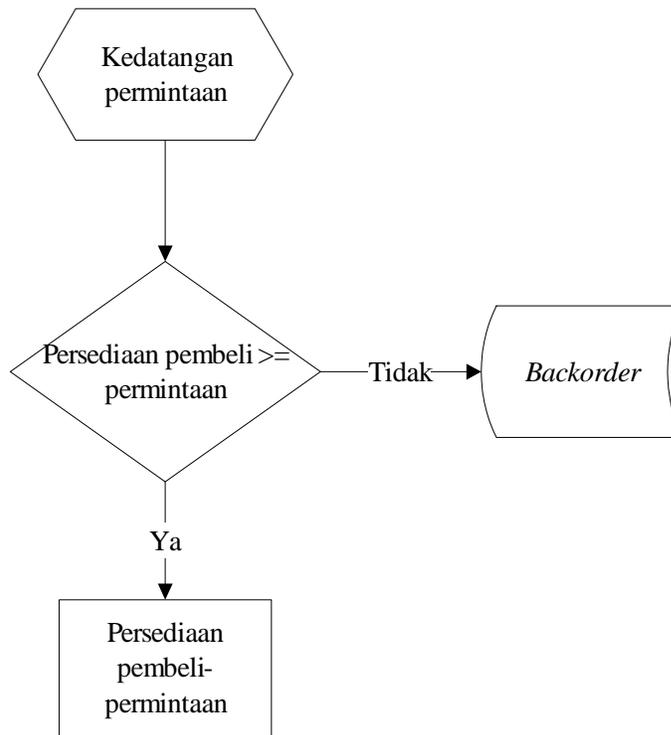
Tercapainya nilai q dan k yang konvergen dapat dibuktikan dengan uji konveksitas. Uji konveksitas dilakukan dengan mencari determinan Hessian persamaan total biaya gabungan. Uji konveksitas selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran.

2.2 Model Simulasi

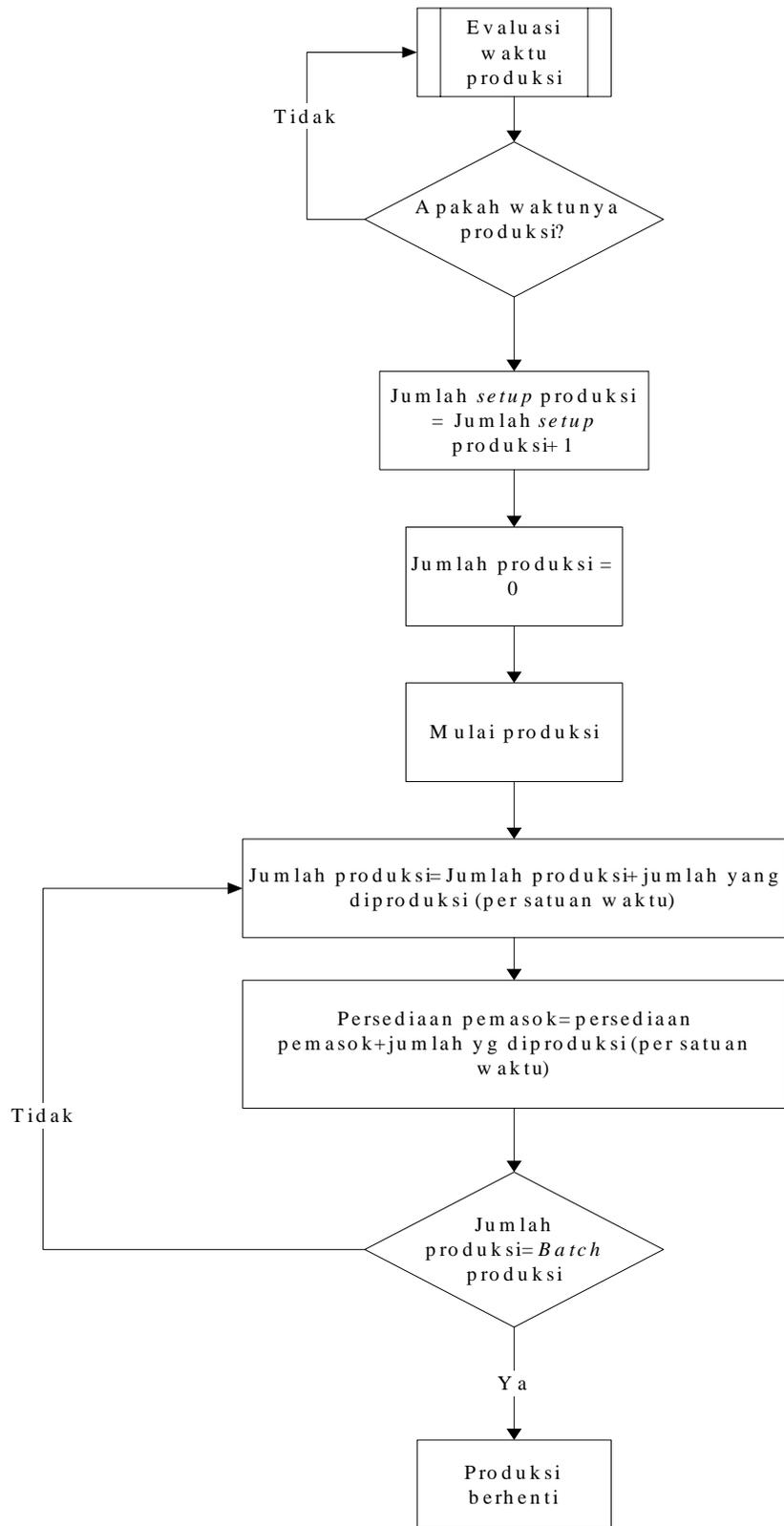
Model simulasi dibuat sesuai dengan karakteristik permasalahan yang diteliti. Model simulasi ini diperlukan untuk memverifikasi model matematis yang telah dibuat. Verifikasi dilakukan dengan membandingkan hasil yang didapatkan pada model matematis dengan hasil yang didapatkan pada model simulasi. Model simulasi pada pembeli dan pemasok dapat dilihat pada Gambar 2, Gambar 3 dan Gambar 4. Gambar 2 memperlihatkan bagaimana pembeli melakukan manajemen permintaan. Kedatangan permintaan diasumsikan berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan standar deviasi σ . Jika pembeli memiliki persediaan yang lebih besar dari permintaan, maka persediaan pembeli akan dikurangi dengan jumlah permintaan yang ada. Sementara jika persediaan pembeli lebih kecil dari jumlah permintaan, maka akan terjadi *backorder*. Permintaan yang *backorder* ini akan dipenuhi pembeli pada waktu pembeli mendapat kiriman sejumlah q dari pemasok. Gambar 3 memperlihatkan bagaimana pemasok melakukan manajemen produksinya. Pemasok akan melakukan evaluasi terhadap waktu untuk memulai proses produksi. Pada saat persediaan pemasok nol, pemasok akan menunggu selama $(q/D - q/P)$ untuk memulai proses produksi. Pada saat berproduksi, produk yang dihasilkan dari

proses produksi akan secara langsung ditambahkan ke persediaan pemasok. Produksi akan berhenti setelah proses produksi dapat menghasilkan produk sejumlah *batch* produksi yang telah ditentukan (mq).

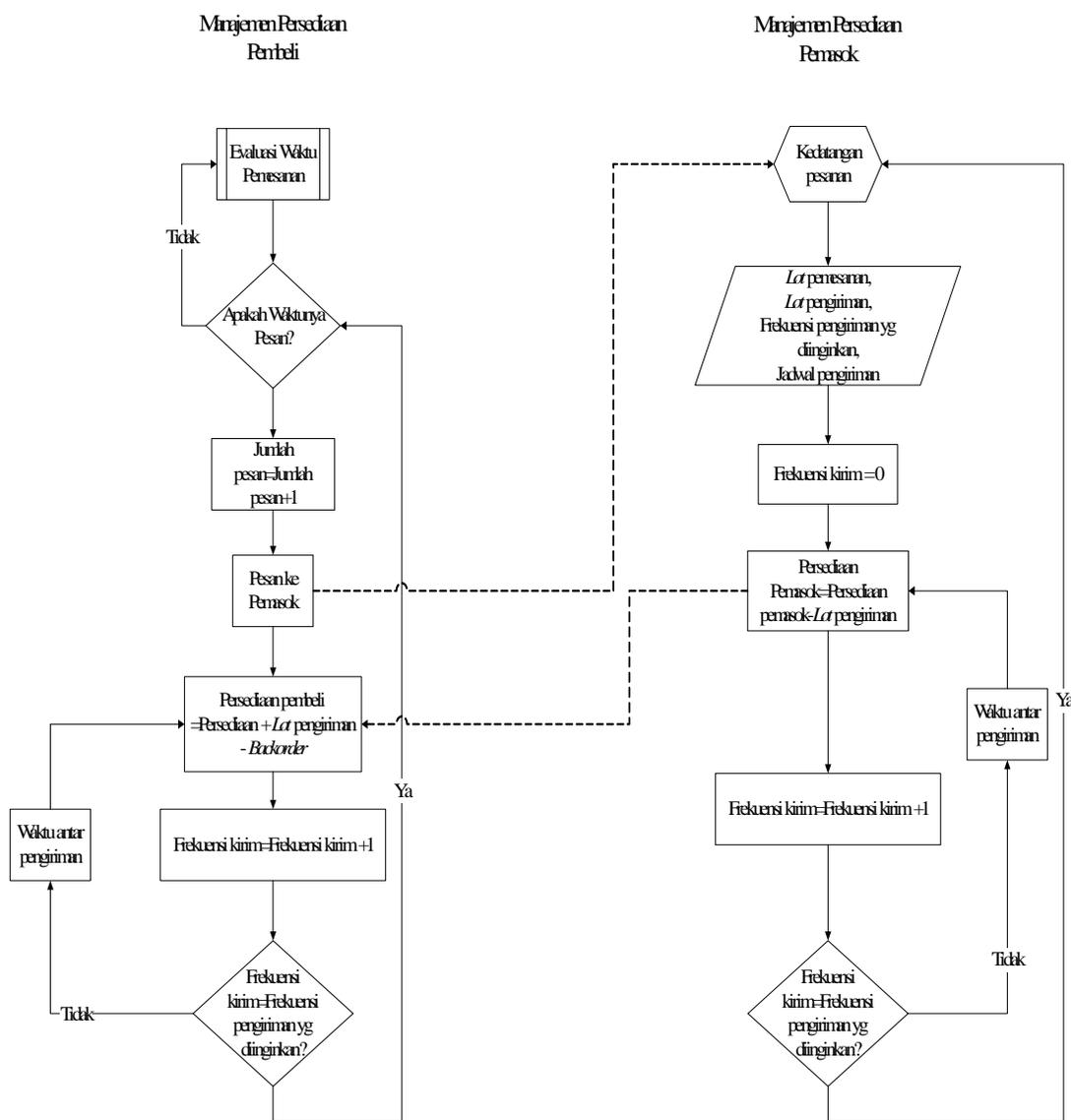
Gambar 4 memperlihatkan pengelolaan persediaan yang terintegrasi antara pembeli dan pemasok. Pembeli akan melakukan evaluasi terhadap waktu pesan. Waktu pemesanan ini diasumsikan tetap setiap periode nq/D . Pada saat pesanan dari pembeli diterima oleh pemasok, maka pemasok akan mendapatkan informasi tentang: *lot* pemesanan, *lot* pengiriman, frekuensi pengiriman yang diinginkan pembeli dan jadwal pengiriman. Jadwal pengiriman pada model ini diasumsikan tetap setiap periode q/D . Setelah informasi tersebut diketahui, maka dengan segera pemasok akan mengirimkan sejumlah q ke pembeli. Pada saat pemasok mengirim sejumlah q , maka persediaan pemasok akan berkurang sebanyak q dan persediaan pembeli akan bertambah sebesar q . Pada saat pembeli menerima pasokan sejumlah q , secara otomatis persediaan pembeli juga akan dikurangi dengan jumlah *backorder* yang terjadi pada periode sebelumnya.



Gambar 2. Model manajemen permintaan pada pembeli



Gambar 3. Model manajemen produksi pada pemasok



Gambar 4. Model manajemen persediaan pemasok-pembeli

3. CONTOH NUMERIK DAN ANALISIS

Parameter yang digunakan dalam analisis ini mengacu pada contoh numerik yang ada pada Ben-Daya dan Hariga (2004) dan Goyal (1988,1995, 2000).

- $D = 1000$ unit/tahun
- $\sigma = 5$ unit/tahun
- $P = 3200$ unit/tahun
- $A = \$50$ /pemesanan
- $F = \$25$ /pengiriman
- $h_b = \$5$ /unit/tahun
- $h_v = \$4$ /unit/tahun
- $\pi = \$15$ /unit
- $K = \$400$ /setup

3.1 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas dilakukan terhadap beberapa parameter kunci, seperti biaya pemesanan, biaya penyimpanan, biaya *backorder* dan kecepatan produksi. Hasil analisis sensitivitas untuk $n = 1$, dimana setiap pemesanan yang dilakukan akan dikirim satu kali, dapat dilihat pada Tabel 1. Peningkatan biaya pemesanan akan mengakibatkan peningkatan biaya persediaan pembeli dan total biaya persediaan gabungan. Peningkatan biaya pada pembeli diakibatkan oleh meningkatnya tingkat persediaan dan jumlah *backorder* yang terjadi. Pembeli cenderung merespon peningkatan biaya pesan dengan mengurangi jumlah pemesanan. Biaya persediaan pada pemasok cenderung menurun seiring dengan turunnya tingkat persediaan dan jumlah *setup* produksi.

Tabel 1. Hasil analisis sensitivitas model ($n = 1$)

Notasi	Nilai	Lot pengiriman	Pembeli				Pemasok			Total biaya
			Persediaan	<i>Backorder</i>	Jumlah pengiriman	Biaya	Persediaan	Jumlah <i>setup</i>	Biaya	
A	20	173,72	90,1	0,3	5,8	714,2	146,6	1,9	1353,8	2068,0
	80	259,7	133,3	0,4	3,9	1076,8	129,9	1,9	1289,5	2366,3
	120	276,26	141,6	0,4	3,6	1239,1	138,1	1,8	1276,5	2515,6
F	10	180,9	93,8	0,3	5,5	805,0	152,6	1,8	1347,6	2152,6
	40	253,22	130,1	0,4	3,9	1011,5	126,6	2,0	1296,3	2307,8
	60	261,83	134,4	0,4	3,8	1098,0	130,9	1,9	1287,5	2385,5
Hb	5	187,81	97,2	0,3	5,3	890,2	158,5	1,8	1343,8	2234,0
	10	133,56	69,2	0,6	7,5	1262,4	158,6	1,9	1383,1	2645,5
Hv	1	179,27	92,9	0,3	5,6	887,6	336,1	0,9	708,0	1595,6
	4	187,81	97,2	0,3	5,3	890,2	158,5	1,8	1343,8	2234,0
	15	187,81	97,2	0,3	5,3	890,2	158,5	1,8	1343,8	2234,0
P	100	187,39	98,8	0,0	5,3	897,8	158,1	1,8	1344,0	2241,8
	1100	134,24	70,2	0,3	7,4	913,6	122,0	0,7	759,0	1672,6
	6400	246,56	126,7	0,4	4,1	943,5	123,3	2,0	1304,3	2247,8

Peningkatan biaya pengiriman akan mengakibatkan naiknya biaya persediaan yang ditanggung pembeli dan total biaya persediaan gabungan, dan turunnya biaya persediaan yang ditanggung pemasok. Pembeli cenderung merespon peningkatan biaya pengiriman dengan mengurangi frekuensi pengiriman (D/q), yang berakibat pada naiknya tingkat persediaan dan *safety stock*. Pengurangan frekuensi pengiriman tersebut diperoleh dengan memperbesar *lot* pengiriman. Sementara pada pemasok, penurunan biaya terjadi karena pemasok cenderung memiliki tingkat persediaan yang lebih rendah.

Peningkatan biaya penyimpanan pada pembeli menyebabkan kenaikan pada biaya persediaan pembeli, pemasok dan total biaya persediaan gabungan. Kenaikan ini disebabkan naiknya jumlah *backorder*, frekuensi pesan dan pengiriman, dan jumlah *setup* produksi. Naiknya biaya penyimpanan pada pemasok akan berakibat pada naiknya biaya pada pembeli, pemasok dan total biaya gabungan. Kenaikan ini diakibatkan naiknya tingkat persediaan pembeli dan jumlah *setup* produksi. Kenaikan biaya *backorder* akan mengakibatkan peningkatan biaya yang ditanggung pembeli dan biaya total gabungan, sedangkan biaya pada pemasok relatif stabil. Peningkatan biaya terjadi karena peningkatan tingkat persediaan pembeli dan frekuensi pemesanan dan pengiriman. Sementara itu, semakin besar kecepatan produksi maka model akan meresponnya dengan meningkatkan *lot* pengiriman. Peningkatan *lot* pengiriman selanjutnya akan berdampak pada berkurangnya persediaan pemasok.

3.2 Perbandingan Model Integrasi dengan Model Independen

Perbandingan model integrasi dengan model independen secara lengkap dapat dilihat pada Tabel 2. Terlihat bahwa model integrasi pemasok-pembeli dapat memberikan penghematan biaya total persediaan yang cukup signifikan jika dibandingkan dengan model independen. Perubahan dari model independen ke model integrasi cenderung menguntungkan pihak pemasok, sedangkan pihak pembeli cenderung dirugikan. Hal ini disebabkan pembeli diharuskan untuk membeli dalam ukuran *lot* yang lebih besar dari ukuran *lot* optimalnya. Bagi pemasok peningkatan ukuran *lot* ini akan menguntungkan karena pemasok akan dapat mereduksi biaya penyimpanannya. Oleh karena itu perubahan kebijakan ini harus diikuti dengan upaya pembagian keuntungan secara merata antara kedua belah pihak. Selain upaya pembagian keuntungan, model *quantity discount* juga merupakan alternatif yang baik untuk diaplikasikan.

3.3 Analisis Simulasi

Model simulasi menghasilkan biaya yang relatif lebih besar dari yang dihasilkan model matematis. Hasil simulasi secara lengkap dapat dilihat pada Tabel 3. Dapat dilihat bahwa model simulasi menghasilkan nilai jumlah pengiriman, jumlah pemesanan dan jumlah *setup* produksi yang bernilai integer. Akibatnya hasil simulasi cenderung menghasilkan biaya pengiriman, biaya pemesanan dan biaya *setup* produksi yang lebih besar dari model matematis.

Dari Tabel 3 juga terlihat bahwa semakin besar standar deviasi permintaan maka *safety stock* yang dimiliki pembeli akan cenderung lebih besar. Hal ini dikarenakan pembeli akan menghadapi ketidakpastian permintaan yang lebih tinggi pada standar deviasi permintaan yang besar, sehingga diperlukan stok pengaman yang lebih besar. Terlihat pula bahwa semakin besar ketidakpastian permintaan, pembeli akan menanggung biaya persediaan yang lebih besar. Pada model simulasi, semakin besar ketidakpastian permintaan akan berakibat pada berkurangnya biaya pada pemasok. Sedangkan pada model matematis, biaya pada pemasok akan bertambah. Perbedaan hasil antara model matematis dengan model simulasi ini sebenarnya lebih diakibatkan oleh faktor jumlah *setup* yang dilakukan pemasok. Pada model simulasi akan selalu menghasilkan jumlah *setup* yang bernilai bulat, sedangkan pada model matematis akan bernilai pecahan. Jika dilihat dari sisi tingkat persediaan pemasok, kedua model memiliki kecenderungan sama yaitu menurun. Sehingga bisa diambil kesimpulan bahwa semakin besar ketidakpastian permintaan, maka biaya yang ditanggung pemasok akan berkurang. Pada kondisi seperti ini, model simulasi dianggap lebih mewakili dibandingkan model matematis.

Tabel 2. Perbandingan model integrasi dengan model independen

					Model integrasi		
<i>n</i>	<i>m</i>	<i>k</i>	<i>SS</i>	<i>q</i>	Biaya pemasok	Biaya pembeli	Total biaya
1	3	1,53	3,32	187,81	1343,8	890,2	2234,0
2	3	1,57	3,29	176,15	1351,4	745,2	2096,6
3	4	1,68	3,14	139,38	1379,5	666,9	2046,4
4	4	1,69	3,13	137,31	1380,5	635,8	2016,3
5	4	1,69	3,12	136,05	1381,3	616,7	1998,0
					Model independen		
<i>n</i>	<i>m</i>	<i>k</i>	<i>SS</i>	<i>q</i>	Biaya pemasok	Biaya pembeli	Total biaya
1	3	1,79	3,27	109,54	1586,91	886,83	2473,74
2	4	1,80	3,14	108,42	1437,33	726,70	2164,03
3	4	1,72	3,08	127,95	1389,32	664,56	2053,88
4	4	1,75	3,04	121,33	1400,52	631,12	2031,64
5	5	1,76	3,02	117,19	1400,44	610,15	2010,59

Tabel 3. Perbandingan model matematis dengan model simulasi

Parameter	Standar deviasi permintaan					
	5		10		20	
	Matematis	Simulasi	Matematis	Simulasi	Matematis	Simulasi
<i>Safety stock</i>	3,29		6,57		13,12	
<i>Lot</i> pengiriman	176,15		175,65		174,69	
Persediaan	91,36	95,24	94,39	98,66	100,47	105,48
<i>Backorder</i>	0,30	0,77	0,60	1,40	1,19	2,93
Pembeli Jumlah pemesanan	2,84	3,00	2,85	3,00	2,86	3,00
Jumlah pengiriman	5,68	6,00	5,69	6,00	5,72	6,00
Biaya	745,15	787,71	765,61	814,22	806,46	871,31
Persediaan	148,63	147,06	148,21	146,73	147,39	146,08
Pemasok Jumlah <i>setup</i>	1,89	2,00	1,90	2,00	1,91	2,00
Biaya	1351,44	1388,24	1351,90	1386,91	1352,84	1384,32
Total biaya	2096,59	2175,94	2117,51	2201,13	2159,30	2255,63

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Hasil uji sensitivitas telah memperlihatkan beberapa perilaku model persediaan yang telah dikembangkan pada penelitian ini. Peningkatan biaya pemesanan atau biaya pengiriman akan mengakibatkan peningkatan biaya persediaan pembeli dan total biaya persediaan gabungan. Peningkatan biaya pada pembeli lebih diakibatkan oleh meningkatnya tingkat persediaan yang ada. Pembeli cenderung merespon peningkatan biaya pesan maupun biaya pengiriman dengan memperbesar *lot* pengiriman sehingga frekuensi pengiriman dapat diperkecil. Sedangkan biaya persediaan pada pemasok cenderung menurun seiring dengan turunnya tingkat persediaan dan jumlah *setup* produksi. Peningkatan biaya penyimpanan pada pembeli maupun pada pemasok menyebabkan kenaikan pada biaya persediaan pembeli, pemasok dan total biaya persediaan gabungan. Kenaikan ini disebabkan naiknya jumlah *backorder*, frekuensi pesan dan pengiriman, dan jumlah *setup* produksi. Kenaikan biaya *backorder* akan mengakibatkan peningkatan biaya yang ditanggung pembeli dan biaya total gabungan, sedangkan biaya pada pemasok relatif stabil. Peningkatan biaya terjadi karena peningkatan tingkat persediaan pembeli dan frekuensi pemesanan dan pengiriman.

Pada model ini, semakin dekat nilai kecepatan produksi (P) dengan permintaan tahunan (D), maka pemasok memerlukan *setup* mendekati satu kali untuk memenuhi permintaan. Pada penelitian ini juga telah dibuktikan bahwa perubahan model independen ke model gabungan pemasok-pembeli akan menghasilkan penghematan biaya total gabungan.

Model persediaan yang telah dikembangkan pada penelitian ini masih dapat dikembangkan sesuai dengan karakteristik permasalahan yang berbeda. Pada model penelitian ini biaya pengiriman masih dipertimbangkan secara implisit, oleh karenanya model yang ada dapat dikembangkan dengan mempertimbangkan biaya pengiriman secara eksplisit ke dalam model. Asumsi *lead time* yang bernilai nol dalam model, dapat dikembangkan menjadi *lead time* deterministik, *lead time* probabilistik dan *controllable lead time*. Model yang ada juga dapat dikembangkan menjadi permasalahan yang lebih kompleks seperti, multi pembeli, multi pemasok, multi pembeli-multi pemasok dan multi produk.

DAFTAR PUSTAKA

- Banerjee, A., 1986. "A Joint Economic-Lot-Size Model for Purchaser and Vendor." *Decision Sciences*, Vol. 17, pp. 292-311.
- Ben-Daya, M., and Hariga, M., 2004. "Integrated Single Vendor Single Buyer Model with Stochastic Demand and Variable Lead Time." *International Journal of Production Economic*, Vol. 92, pp. 75-80.
- Chopra, S., and Meindl, P., 2001. *Supply Chain Management: Strategy, Planning and Operation*, Prentice Hall, Singapore.
- David, I., and Eben-Chaime, M., 2003. "How Far should JIT Vendor-Buyer Relationship go?" *International Journal of Production Economic*, Vol. 63, pp. 361-368.
- Goyal, S. K., 1976. "An Integrated Inventory Model for A Single Supplier-Single Customer Problem." *International Journal of Production Research*, Vol. 15, pp. 107-111.
- Goyal, S. K., 1988. "A Joint Economic-Lot-Size Model for Purchaser and Vendor: A Comment." *Decision Sciences*, Vol. 19, pp. 236-241.
- Ouyang, L.Y., Wu, K. S., and Ho, C. H., 2004. "Integrated Vendor-Buyer Cooperative Models with Stochastic Demand in Controllable Lead Time." *International Journal of Production Economics*, Vol. 92, pp. 255-266.
- Pujawan, I. N., and Kingsman, Brian G., 2002. "Joint Optimisation and Timing Synchronisation in a Buyer Supplier Inventory System." *International Journal of Operations and Quantitative Management*, Vol. 8, pp. 93-110.

LAMPIRAN

Determinan Hessian untuk permasalahan ini dapat didefinisikan sebagai :

$$|H_2| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}$$

Adapun syarat konveksitas diperoleh jika determinan Hessian dan elemen diagonalnya (g_{11} dan g_{22}) bernilai positif. Selanjutnya perhitungan determinan Hessian dapat dijelaskan sebagai berikut :

$$g_{11} = \frac{\partial^2 TC_{Gabungan}}{\partial q^2} = \frac{2D}{nq^3}(A + Fn) - \frac{h_b k \sigma}{4q\sqrt{qD}} + \frac{2D\pi\sigma(F_s(k) - 1)}{4q^2\sqrt{qD}} + \frac{2DK}{mq^3} > 0$$

$$g_{22} = \frac{\partial^2 TC_{Gabungan}}{\partial k^2} = \frac{\pi D \sigma \sqrt{q/D} f_s(k)}{q} = \frac{\pi \sigma \sqrt{qD} f_s(k)}{q} > 0$$

$$g_{12} = \frac{\partial^2 TC_{Gabungan}}{\partial q \partial k} = \frac{\sigma h_b}{2D\sqrt{q/D}} - \frac{\pi D \sigma (F_s(k) - 1) \sqrt{q/D}}{2q^2}$$

$$g_{12} = \frac{\sigma h_b}{2\sqrt{qD}} - \frac{\pi \sigma (F_s(k) - 1) \sqrt{qD}}{2q^2}$$

$$g_{21} = \frac{\partial^2 TC_{Gabungan}}{\partial k \partial q} = \frac{\sigma h_b}{2D\sqrt{q/D}} - \frac{\pi D \sigma (F_s(k) - 1) \sqrt{q/D}}{2q^2}$$

$$g_{21} = \frac{\sigma h_b}{2\sqrt{qD}} - \frac{\pi \sigma (F_s(k) - 1) \sqrt{qD}}{2q^2}$$

$$|H_2| = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21} = \frac{\partial^2 TC_{Gabungan}}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial^2 TC_{Gabungan}}{\partial k^2} - \left[\frac{\partial^2 TC_{Gabungan}}{\partial q \partial k} \cdot \frac{\partial^2 TC_{Gabungan}}{\partial k \partial q} \right]$$

$$|H_2| = \left(\frac{2D}{nq^3} (A + Fn) - \frac{h_b k \sigma}{4q\sqrt{qD}} + \frac{2D\pi\sigma(F_s(k) - 1)}{4q^2\sqrt{qD}} + \frac{2DK}{mq^3} \right) \left(\frac{\pi\sigma\sqrt{qD}f_s(k)}{q} \right)$$

$$- \left(\frac{\sigma h_b}{2\sqrt{qD}} - \frac{\pi\sigma(F_s(k) - 1)\sqrt{qD}}{2q^2} \right)^2$$

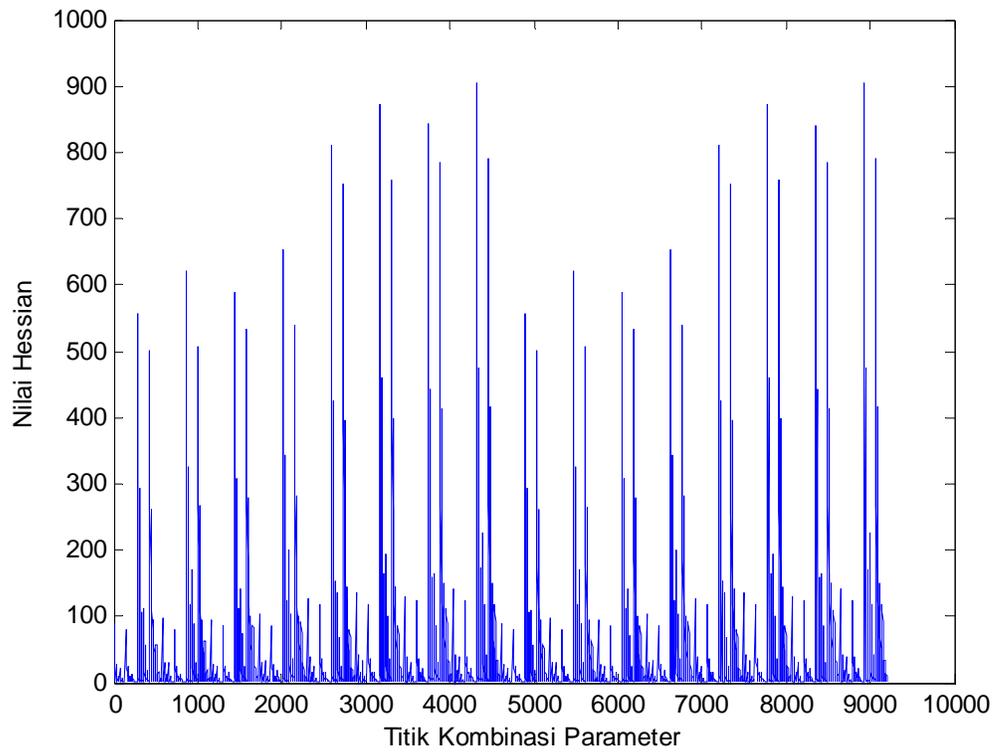
$$|H_2| = \frac{2D\pi\sigma\sqrt{qD}f_s(k)(A + Fn)}{nq^4} - \frac{h_b k \sigma^2 \pi \sqrt{qD}}{4q^2\sqrt{qD}} + \frac{2D\pi^2\sigma^2(F_s(k) - 1)f_s(k)}{4q^3}$$

$$+ \frac{2D\pi K \sigma \sqrt{qD} f_s(k)}{mq^4} - \left[\frac{\sigma^2 h_b^2}{4Dq} - \frac{2\sigma^2 h_b \pi (F_s(k) - 1) \sqrt{qD}}{4q^2\sqrt{qD}} + \frac{\pi^2 \sigma^2 (F_s(k) - 1) qD}{4q^4} \right]$$

$$|H_2| = \frac{2D\pi\sigma\sqrt{qD}f_s(k)(A + Fn)}{nq^4} + \frac{2D^2\pi^2\sigma^2(F_s(k) - 1)f_s(k)}{4q^3\sqrt{qD}} + \frac{2D\pi K \sigma \sqrt{qD} f_s(k)}{mq^4}$$

$$+ \frac{2\sigma^2 h_b \pi (F_s(k) - 1)}{4q^2} - \frac{h_b k \sigma^2 \pi}{4q^2} - \frac{\sigma^2 h_b^2}{4Dq} - \frac{\pi^2 \sigma^2 (F_s(k) - 1) D}{4q^3}$$

Saat ini nilai $|H_2| > 0$ hanya akan ditunjukkan secara numerik seperti pada Gambar 5.



Gambar 5. Hasil analisis numerik